1 Некоторые свойства импликации

Вот список некоторых формул преобразования импликации [1]

1. Принципы упрощения

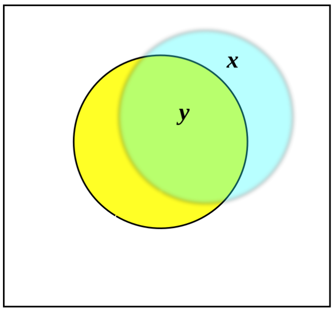
   - Если истинно $(a \wedge b) \to a$,
     то справедливо $(a \wedge b) \to b$.

   - Если истинно $a \to (a \vee b)$,
     то справедливо $b \to (a \vee b)$.

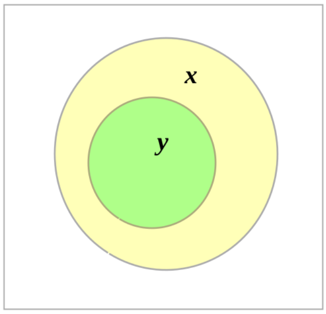
2. Принципы составления

   - $(x \to a) \wedge (x \to b) = (x \to (a \wedge b))$
   - $(x \to a) \vee (x \to b) = (x \to (a \vee b))$
   - $((a \to x) \wedge (b \to x) = (a \vee b) \to x$
   - $((a \to x) \vee (b \to x) = (a \wedge b) \to x$

Применительно к импликации $y \to x$ диаграмма Эйлера-Венна принимает вид, изображенный на рис. 1a



(a)



(b)

Рис. 1

Универсум (всё) изображен на нем в виде прямоугольника. Желтый цвет изображает множество точек, для которых импликация ложна. Во всех остальных случаях она истинна.

Пожалуй самым интересным для нас является утверждение о том, что

$$y \to x = 1 \tag{1}$$

тождественно истинно для всех y в случае, если круг Эйлера, соответствующий y **полностью находится** внутри круга, соответствующего x рис. 1b

Опираясь на это утверждение, легко найти максимальное множество y, для которого справедливо соотношение (1). С этой целью станем увеличивать множество y, как изображено на рис 2a

[1] Алгебра логики,Mathesis, Одесса, 1909, стр.10

(a) (b)

Рис. 2

Соотношение (1) будет выполняться тождественно пока множество y находится внутри множества x.

Максимальный размер множества y будет достигнут, когда оно совпадет с множеством x. Минимальный его размер, очевидно, равняется нулю.

Аналогичне рассуждения применимы и к множеству x. Его максимальный размер неопределен. Минимальный — ограничен множеством y и совпадает с его размером (см. рис. 2b).

Приведенные соображения позволяют легко решать экзаменационные задачи с непосредственно заданными множествами, как непрерывными, так и с дискретными.

2 Задачи с делимостью

2.1 Общий подход

Речь идет о задачах с выражениями вида *Дел(x,y)*, где x и y — натуральные числа, а все выражение обозначает множество x, которые без остатка делятся на y.

Замечательной особенностью подобных множеств является их **периодичность**. Это означает, что они содержат элементы $y,\ 2y,\ 3y\ \ldots\ ny,\ \ldots$, где n — натуральное число.

Для начала рассмотри импликацию вида:

$$\text{Дел(x,A)} \rightarrow \text{ Дел(x,B)} \tag{2}$$

Воспользуемся соотношением для импликации

$$\text{Дел(x,A)} \rightarrow \text{ Дел(x,B)} = \neg \text{ Дел(x,A)} \vee \text{ Дел(x,B)} \tag{3}$$

Точки, соответствующие этому соотношению, отобразятся на числовой оси в виде подобном рис. 3.

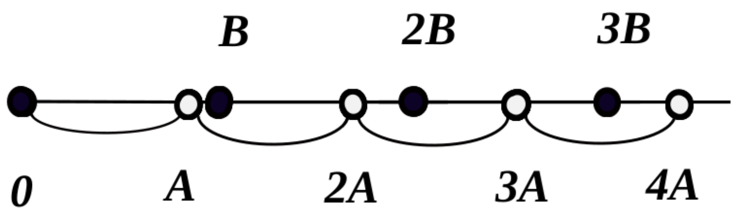


Рис. 3

Из рис. 3 видно, что множества ¬ Дел(x,A) и Дел(x,B) закрывают всю числовую ось, за исключением точек $n \cdot A$, где n — натуральное число. Для того чтобы соотношение (3) было тождественно истинно для всех натуральных x надо, чтобы точки B попадали в пустые места, соответствующие точкам A. Для этого, в частности, должно выполняться соотношение

$$A = B \tag{4}$$

Более того, периодичность множеств a и b делает соотношение (2) тождественно истинным для всех натуральных x, удовлетворяющих соотношению

$$A = B \cdot i \ (i = 1, 2, 3 \cdots) \tag{5}$$

Отсюда следует, что множество $\{A\}$ не имеет верхней границы, но имеет нижнюю, равную числу B.

Применительно к множеству $\{B\}$ соотношение (5) может быть переписано в виде

$$B = \frac{A}{i} \ (i = 1, 2, 3 \cdots) \tag{6}$$

Множество $\{B\}$ в качестве нижней границы имеет число 1, а в качестве верхней — число A.

Таким образом задача с простой импликацией «делимостей» решена.

2.2 Более сложные задачи

На экзаменах предлагаются более сложные задачи. Простыми преобразованиями они могут быть приведены к нескольким базовым видам.

Рассмотрим каждый из них отдельно. В рассмотрении будем считать, что ищется число A, а числа $B, C \cdots$ заданы в условии задачи.

2.2.1 Первый тип задач

Первый тип задач имеет следующий вид: дано

$$\text{Дел}(x, A) \to (\text{Дел}(x, B) \wedge \text{Дел}(x, C)) \tag{7}$$

требуется определить для каких значений A соотношение (7), тождественно равно единице, т. е. истинно для всех натуральных x.

Утверждение $(\text{Дел}(x, B) \wedge \text{Дел}(x, C))$ определяет множество чисел, которые делятся нацело и на B, и на C. Это числа вида

$$N \cdot i \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots) \tag{8}$$

где N — наименьшее общее кратное (н.о.к.) чисел B и C.

В задачах этого типа обычно требуется определить наименьшее A. Оно определится соотношением

$$A = \text{н.о.к.}(B, C) \tag{9}$$

2.2.2 Второй тип задач

В следующем типе задач конъюнкция в правой части заменена дизъюнкцией. Требуется найти A, при которых выражение

$$\text{Дел}(x, A) \to (\text{Дел}(x, B) \vee \text{Дел}(x, C)) \tag{10}$$

тождественно истинно.

Правая часть этого уравнения может быть представлена множеством точек, принадлежащих или множеству Дел(x, B), или множеству Дел(x, C).

Преобразуем (10), используя свойства импликации. Получим

$$\text{Дел}(x, A) \to (\text{Дел}(x, B) \vee \text{Дел}(x, C)) = (\text{Дел}(x, A) \to (\text{Дел}(x, B)) \vee (\text{Дел}(x, A) \to (\text{Дел}(x, C)) \tag{11}$$

Дизъюнкция истинна, если истинно хотя бы одно из логических слагаемых, что дает совокупность условий

$$A = B \cdot i \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots) \tag{12}$$

или

$$A = C \cdot j \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots) \tag{13}$$

Значения A представлют собой объединение двух независимых множеств, не ограниченных сверху. Поэтому в задачах этого типа речь может идти только о поиске наименьшего значения A или поиске иного значения определяемого дополнительными условиями. Поиск же наименьшего значения среди элементов множеств, определяемых соотношениями (12) и (13) трудностей не представляет.

Наименьшее A, удовлетворяющее уравнению (10),очевидно, равно меньшему из B и C.

2.2.3 Третий тип задач

Третий тип задач рассматривает соотношения вида

$$(\text{Дел}(x, B) \wedge \text{Дел}(x, C)) \to \text{Дел}(x, A) \tag{14}$$

Предлагается найти значения A при которых это соотношение тождественно истинно, т. е. выполняется при любых значениях x.

Раскрывая импликацию и применяя закон Де Моргана получим

$$(\text{Дел}(x, B) \wedge \text{Дел}(x, C)) \to \text{Дел}(x, A) = \neg\text{Дел}(x, B) \vee \neg\text{Дел}(x, C)) \vee \text{Дел}(x, A) \tag{15}$$

Дизъюнкция отрицаний, стоящих в правой части (15) перекрыват всю числовую ось за исключением точек, где совпадают $B \cdot i$ и , $C \cdot j$, как показано на рис. 4.

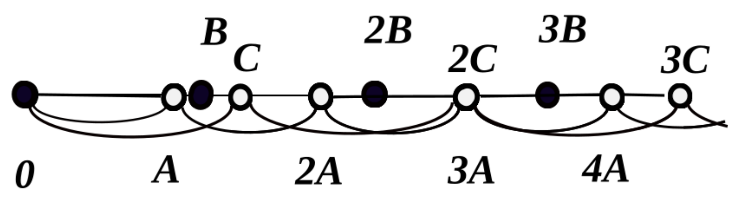


Рис. 4

Это число является, очевидно, общим кратным чисел B и C.

Минимальное значение A равно 1. Наибольшее — равняется наименьшему общему кратному B и C.

2.2.4 Четвертый тип задач

Требует подобрать значения A, при которых выражение

$$(\text{Дел}(x, B) \vee \text{Дел}(x, C)) \to \text{Дел}(x, A) \tag{16}$$

тождественно истинно.

Повторяя рассуждения для задачи третьего типа, получим

$$(\text{Дел}(x, B) \vee \text{Дел}(x, C)) \to \text{Дел}(x, A) = (\neg\text{Дел}(x, B) \wedge \neg\text{Дел}(x, C))) \vee \text{Дел}(x, A) \qquad (17)$$

Конъюнкция в правой части (17) закрывает всю числовую ось за исключением точек, представляющих собой объединение множеств $B \cdot i$ и , $C \cdot j$, как видно из рис.5

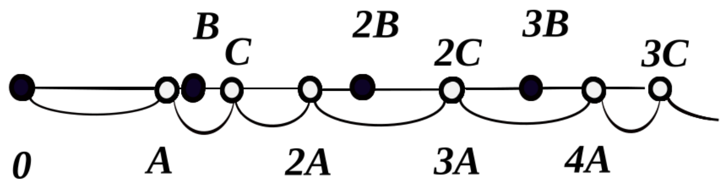


Рис. 5

Множество Дел(x, A) должно перекрывать все открытые точки. Для этого, в частности, A не должно превышать меньшую из них. Очевидно, что в качестве A можно взять любой общий делитель чисел B и C. Наименьшее его значение, очевидно равно 1.

В большинстве случаев требуется найти наибольшее A. Таковым является наибольший общий делитель чисел B и C.

2.3 Задачи с A, входящим в выражения

В более сложной ситуации искомое A оказывается включенным в сложное выражение, требующее дополнительного анализа. Здесь также можно выделить четыре основных случая.

2.3.1 Первый случай

В первом случае выражение, которое должно быть тождественно истинным имеет вид

$$(\text{Дел}(x, B)) \to (\text{Дел}(x, A) \wedge \text{Дел}(x, C)) \qquad (18)$$

Левая часть соотношения делает все выражение истинным для всей числовой оси за исключением точек

$$x = B \cdot i \qquad (i = 0, 1, 2, 3 \cdots) \qquad (19)$$

Они должны быть закрыты точками, в которых x делится, как на A, так и на C. Как уже было показано ранее, это возможно, если B является кратным чисел A и C. В частности

$$B = A \cdot C \cdot i \qquad (i = 0, 1, 2, 3 \cdots) \qquad (20)$$

откуда следует, что

$$A = \frac{B}{C \cdot i} \qquad (21)$$

Отсюда, в частности, следует, что уравнение (18) имеет решение только в случае когда B пропорционально C.

Величину A следует искать среди возможных коэффициентов пропорциональности числа B. Наименьшее A равно 1. Наибольшее —

$$A = \frac{B}{C} \qquad (22)$$

2.3.2 Второй случай

Следующим рассмотрим случай, когда конъюнкция в правой части (18) заменена дизъюнкцией. Исследуемое соотношение при этом приобретает вид

$$(\text{Дел}(x, B)) \to (\text{Дел}(x, A) \vee \text{Дел}(x, C)) \tag{23}$$

В этом случае и A, и C могут независимо друг от друга закрывать точки, остающиеся незкрытыми выражением, стоящим в левой части импликации. Поэтому выражение (23) можно преобразовать к виду

$$(\text{Дел}(x, B)) \to (\text{Дел}(x, A)) \vee (\text{Дел}(x, B)) \to \text{Дел}(x, C)) \tag{24}$$

Из (24) следует, что если

$$B = C \cdot i \qquad (i = 1, 2, 3 \dots), \tag{25}$$

то выражение (23) тождественно истинно для любых A.

В случае же, когда соотношение (25) не выполняется соотношение (23) тождественно истинно для A, удовлетворяющих условию

$$B = A \cdot i \qquad (i = 1, 2, 3 \dots), \tag{26}$$

из которого следует, что

$$A = \frac{B}{i} \qquad (i = 1, 2, 3 \dots), \tag{27}$$

Наименьшее возможное A, при этом равно единице, а наибольшее — B.

2.3.3 Третий случай

В случае, когда A содержится в левой части импликации в составе конъюнкции

$$(\text{Дел}(x, A)) \wedge (\text{Дел}(x, B)) \to (\text{Дел}(x, C)) \tag{28}$$

Избавляясь от импликации, получим

$$\neg(\text{Дел}(x, B)) \vee \neg(\text{Дел}(x, A)) \vee (\text{Дел}(x, C)) \tag{29}$$

Как было показано ранее, выражения с отрицанием закрывают всю числовую ось за исключением точек

$$x = N \cdot i, \tag{30}$$

где i — натуральное число, а N — наименьшее общее кратное чисел A и B.

Множество $\text{Дел}(x, C)$ должно закрывать эти точки. Отсюда следует, что

$$N = C \cdot j \qquad (j = 1, 2, 3 \dots) \tag{31}$$

С точностью до целого множителя k

$$kN = A \cdot B \tag{32}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} A &= \frac{C \cdot j \cdot k}{B} \\ A &\neq B \end{aligned} \tag{33}$$

Таким образом, наибольшее A не определено. Наименьшее — входит в множество

$$A = \frac{C \cdot k}{B} \qquad (k = 1, 2, 3 \dots) \tag{34}$$

2.3.4 Четвертый случай

Последний случай отличается от (28) тем, что выражение в левой части содержит дизъюнкцию

$$(\text{Дел}(x, A)) \vee (\text{Дел}(x, B)) \rightarrow (\text{Дел}(x, C)) \tag{35}$$

Избавляясь от импликации, имеем

$$\neg(\text{Дел}(x, A)) \wedge \neg(\text{Дел}(x, B)) \vee (\text{Дел}(x, C)) \tag{36}$$

Конъюнкция выражений с отрицаниями оставляет на числовой оси незакрытые точки

$$\begin{array}{ll} x = A \cdot i & (i = 1, 2, 3, \dots), \\ x = B \cdot j & (j = 1, 2, 3, \dots) \end{array} \tag{37}$$

Выражение Дел(x, C) закроет все эти точки только в случае если C является общим делителем A и B. Это означает одновременное выполнение условий

$$\begin{array}{ll} A = C \cdot i & (i = 1, 2, 3, \dots), \\ B = C \cdot j & (j = 1, 2, 3, \dots) \end{array} \tag{38}$$

В частности, если B не делится на C, например при $B < C$, соотношение (35) не может быть тождественно истинным ни для каких значений A. Если же второе уравнение из (38) выполняется,то

$$A \cdot B = C^2 \cdot i \cdot j = C^2 \cdot n \qquad (n = 1, 2, 3 \dots) \tag{39}$$

Отсюда находим

$$A = \frac{C^2 \cdot n}{B} \tag{40}$$

Откуда видно, что наибольшее A не определено, а наименьшее следует искать среди целых множителей числа C.